AVERTISSEMENT

Pourquoi apprendre tant de mathématiques à l'école (sic) alors que l'on ne se sert pas deux fois d'une règle de trois en une vie ? Pourquoi, en effet ! Il y aurait à notre avis mille raisons. Mais qu'importe, il y en a une de plus et cette mille une ième est peut-être la première la vie quotidienne fourmille de mathématiques; et dans ces mathématiques, les probabilités se taillent une part enviable.

Paradoxalement, les probabilités (et les statistiques) ont longtemps été les mal-aimées des programmes de l'enseignement secondaire et du premier cycle universitaire, avec cette caractéristique unique entre toutes les disciplines mathématiques elles sont enseignées préférentiellement dans les filières non mathématiques (économie, gestion, biologie, médecine, vétérinaire, géographie, etc). Les probabilités sont en prise avec la vie, donc dans l'air du temps; mais à ce titre, elles s'appuient sur un passage du concret à l'abstrait, la modélisation (et son billet de retour l'interprétation), ce qui les rend difficiles. Donc pas dans l'air du temps du tout. Résultat là où l'on ne peut pas s'en passer, généralement à cause des statistiques, on fait contre mauvaise fortune bon coeur et, surtout, comme on peut. Et là où le public est le mieux à même de surmonter l'obstacle, on a souvent eu tendance à l'en dispenser pour ne pas ralentir la formation du mathématicien en herbe avec tous ces allers-retours.

C'est partant de ce constat que nous avons entamé au début des années 1990, jusqu'en 1996, une série d'articles dans le "magazine de mathématiques pures et appliquées" Quadrature (1). Série qui, de fil en aiguille, a servi de catalyseur à ce livre. Les traités de probabilités à destination des étudiants, surtout dans leurs premières pages il est vrai, proposent de nombreux exemples d'applications des probabilités (à la physique statistique élémentaire, aux statistiques médicales via la formule de Bayes, à la fiabilité, etc.). Beaucoup de ces exemples, s'ils ont une portée pédagogique incontestable et généralement une réelle importance scientifique et technique, restent cependant souvent éloignés de la vie quotidienne. Alors, nous avons tenté de jouer le jeu des

----

1 devenu depuis "magazine de mathématiques pures et épicées mais ouvrant toujours, par le truchement des mathématiques, "plus d'une fenêtre sur plus d'un monde".

probabilités dans la vraie vie; en répondant à des questions que l'on nous posait, et surtout en nous en posant à nous-mêmes aussi souvent que possible, au supermarché, en voiture, dans l'avion, en lisant le journal, au café ou en regardant la télé. Le résultat, une dizaine d'articles sur des thèmes tout àfait disparates, souvent anecdotiques et fiers de l'être, parfois de portée plus générale, presque tous à dominante probabiliste.

Les principaux thèmes abordés dans ce livre sont le sexe, la drogue(2), les voitures, le jeu et l'argent. La faute en incombe-t-elle aux auteurs ou est-elle inhérente au projet lui-même, nous sommes mal placés pour répondre. Mais que le lecteur se rassure, il pourra constater au fil des chapitres que les probabilités incitent à la moralité, à l'honnêteté, à la prudence et à la mesure (en théorie du moins). Est-ce un argument supplémentaire pour enseigner cette discipline à nos élèves dès leur plus jeune âge ? Chacun jugera.

Les sujets évoqués dans la première partie - Au hasard des problèmes - témoignent de la présence des probabilités (et de leurs petites soeurs, les statistiques) un peu partout dans le monde moderne. Hormis dans l'avant-propos, soumis à quelques contraintes historiques, nous avons évité autant que possible les exemples les plus classiques illustrant les manuels de probabilités, pour privilégier le hasard des rencontres. Parfois, nous avons succombé à l'agréable tentation de pousser un peu plus loin le bouchon probabiliste. Que ceux que ces développements rebutent - temporairement - ne se découragent pas, il suffit d'aller cueillir le fruit de nos efforts en fin de chapitre et de passer au suivant.

La seconde partie - En voiture ! - est dévolue à l'automobile, à la fois comme objet se mouvant (en l'occurrence lentement et de façon déterministe) et comme objet se stationnant (fort mal et de façon aléatoire).

Deux thèmes donnent lieu à des développements plus systématiques la Française des Jeux à laquelle est consacrée toute la partie - L'État-casino - et les mathématiques financières dans la (dernière) partie, La bourse et la vie. En décortiquant les enfants et petits-enfants de la défunte Loterie nationale nous avons fait notre devoir de citoyens... probabilistes mais aussi beaucoup progressé, et pas seulement en dénombrement.

Dans La bourse et la vie, notre ambition est plus directement pédagogique nous proposons un exposé à la fois élémentaire(3) et opérationnel, technique et mathématique de la valorisation des options négociables. En tentant de faire court. Pour mémoire, les options sont une classe de produits financiers dits "dérivés", au sens "greffés" sur des actifs cotés déjà existants. Si leur usage est ancien et remonte au siècle dernier sur les marchés de céréales, elles ont été plébiscitées ces dernières années par les acteurs des marchés financiers.

----

2 sous forme chocolatée.
3 i.e. sans espérance conditionnelle !

C'est aussi - voire surtout - l'occasion pour le lecteur d'effleurer sans trop de douleur le mouvement brownien et les processus stochastiques, mais aussi d'aborder quelques questions fondamentales liées à la théorie de la décision en univers aléatoire (arrêt optimal), en un mot d'apercevoir l'étendue du paysage probabiliste.

Pour accompagner le lecteur et lui permettre une lecture sélective ou étalée dans le temps, nous avons indiqué en tête de chaque chapitre le niveau mathématique utile pour aborder efficacement les passages formalisés :

NIVEAU 0 : Aucun
NIVEAU 1 : Terminale S
NIVEAU 2 : 1er cycle universitaire (mathématiques ou physique)
NIVEAU 3 : 2e cycle universitaire (mathématiques)
Enfin, mille mercis à :

Omer ADELMAN, François BOISSON, Marc BRIANE, Caroline CHARBONNEAU, Fabienne COMTE, Véronique COURLIER, Sylvain DELATTRE, Pierre DESPR0GES, Xavier GUYON, Laurence MARSALLE, Yves PAGÈS, Rémy PETITJEAN, Dominique SIMPELAERE, Marc TASTET,

pour avoir, par leurs contributions, aidé ce livre à exister. Évidemment, erreurs et opinions sont nôtres.

LES AUTEURS

AVANT-PROPOS

Hasard : substantif masculin. Mot d'origine arabe (az-zahr: le dé) apparu en français via l'espagnol azar. A d'abord signifié jeu de dés avant de désigner plus généralement un événement non prévisible, sans cause apparente (les hasards de la vie) et, par extension, le mode d'apparition d'événements de ce type (En passant par hasard).

Si les jeux de dés apparaissent donc comme les ancêtres étymologiques des probabilités, ils en sont aussi les ancêtres mathématiques puisque, parmi les premières questions proprement probabilistes répertoriées, la plupart font référence aux jeux de dés. Ainsi, le prince de Toscane demandant à Galilée (1564-1642)(4) pourquoi, alors que les nombres 9 et 10 s'écrivent d'autant de façon différentes comme somme de trois nombres compris entre 1 et 6, l'on observe plus souvent un total de 10 lorsque l'on lance trois dés (5) ? Ou encore, le Chevalier de Méré (1610-1685) (6) demandant à son ami Blaise Pascal (1623-1662) (7) s'il est plus probable d'obtenir un six (au moins) lors de 4 lancers d'un seul dé qu'un double-six (au moins) lors de 24 lancers de deux dés (faire sonner les dés) ? La réponse à cette seconde question est "oui" puisque les probabilités respectives de ces événements sont approximativement 0,5177 et 0,4914 (8). On sait peu de choses de la vie de ce Chevalier mais par sa question même, il apparaît qu' il cherchait une confirmation théorique du fait qu'il avait observé au travers d'innombrables essais : ces deux probabilités sont à la fois proches, et proches de 1/2. Avait-il pour autant poussé ses tentatives assez loin pour être convaincu qu'elles étaient différentes (entre elles et de 1/2) ? Nul ne saurait le dire, mais il est en revanche clair qu'il avait l'intuition de la loi des grands nombres exprimant la convergence de la fréquence empirique vers la ...

----

4 Inventeur de la lunette astronomique et militant obstiné de l'héliocentrisme copernicien. Condamné au reniement par l'Église lors d'un procès à sensation et récemment réhabilité par le pape Jean-Paul II.

5 Voir la solution des jeux " en annexe de l'avant-propos.

6 Georges Brossin, Chevalier puis Marquis de Méré, moraliste français.

7 Mathématicien, physicien et philosophe français.

8 Voir la " solution des jeux

probabilité "théorique" lorsque le nombre de répétitions indépendantes d'une expérience croît indéfiniment. Cette loi sera établie mathématiquement pour la première fois par Bernoulli (Jacques 1er 1654-1705)(9) dans le cadre du jeu de pile ou face (et publiée dans son ouvrage posthume Ars conjectandi en 1713). Le Chevalier de Méré se mêlait-il de jouer ? Sans doute et sinon lui, au moins son entourage. Sinon comment justifier un tel intérêt pour ces deux figures de dés ? En effet, fort d'une réponse numérique exacte à la question posée, il était alors loisible d'engager des paris, soit en jouant une figure contre l'autre, soit en l'opposant à un jeu de pile ou face équilibré. En pariant systématiquement sur la configuration la plus probable, le temps et à la loi des grands nombres permettaient de bénéficier financièrement du léger biais dont lui seul avait connaissance. L'idée d'une telle stratégie sous-tend cette fois une bonne intuition de la notion d'espérance mathématique, quantité qui, dans un jeu de hasard, s'exprime comme le produit des gains par leur probabilité d'occurrence, sommé sur tous les gains possibles.

Le Chevalier de Méré a donc sans doute été un pionnier des probabilités appliquées. Il reste que cette introduction chevaleresque ne doit tromper personne, son rôle s'est au mieux limité à celui de catalyseur ; parmi d'autres, et si son nom reste lié aux origines des probabilités, il le doit à sa proximité amicale et intellectuelle avec Blaise Pascal à qui l'on doit avec Pierre Simon de Fermat (1601-1665)(10) les premières contributions théoriques au calcul des probabilités. Ces travaux sont le fruit d'une correspondance entre les deux savants, initiée par Pascal en 1654. Au départ, celui-ci avait soumis à Fermat la solution qu'il avait apportée au problème, fort discuté à l'époque, de la répartition équitable des mises entre les participants d'un jeu de hasard lors d'une interruption prématurée de la partie. Plusieurs savants éminents y avaient d'ailleurs apporté des solutions qui se révélèrent fausses. En langage moderne - et si l'on raisonne en moyenne - la réponse est immédiate : les mises doivent être réparties au prorata des probabilités que chacun des participants a de gagner à l'instant de l'interruption. À l'époque, il restait tout simplement à inventer le concept de probabilité. Et effectivement, dans ces échanges, publiés en 1679, la notion de probabilité (comme nombre compris entre 0 et 1) mais aussi d'espérance mathématique sont clairement employées, sans jamais s'extraire cependant d'un contexte numérique. On peut aussi chercher l'origine de l'espérance mathématique dans le texte fameux du pari de Pascal (11) Son but était de démontrer aux libertins qu'ils avaient en tout état de cause intérêt à croire en Dieu. Et cette démonstration est de nature probabiliste.

----

9 Mathématicien suisse d'origine hollandaise, membre le plus éminent, avec son frère Jean, de toute une dynastie de mathématiciens.

10 Mathématicien français, président du parlement de Toulouse, célèbre pour ses travaux en arithmétique, jusqu'à en éclipser ses nombreuses autres contributions aux mathématiques, notamment l'invention du calcul des probabilités avec Pascal.

11 dans le recueil des Pensées, pensée no 233 de l'édition Brunschvicg.

Les probabilités sont donc nées au XVIIe siècle en tant que discipline mathématique, à partir de réflexions motivées par des jeux de hasard. Il est d'usage d'en déduire que, comparée à la géométrie, la mécanique rationnelle ou l'arithmétique, cela en fait une branche relativement jeune des mathématiques. En fait, elle l'est pourtant à peine moins que la théorie des graphes, née un siècle plus tard de la réponse apportée par Léonard Euler (1707-1783)(12) au problème des sept ponts de Koenigsberg(13). Celle-ci passe pourtant encore pour très juvénile ! Dans le même esprit, on peut constater que l'analyse, dans sa conception moderne, a pris son essor à la même époque sous l'égide de Gottfried Leibniz (1646-1716)(14) et d'Isaac Newton (1642-1727)(15), et n'a atteint sa maturité qu'au XIXe siècle (Riemann, Cauchy, Weierstrass, ...). Mais la singularité des probabilités, à laquelle se heurte chaque étudiant, chaque enseignant, chaque chercheur, est ailleurs, c'est la modélisation. Plus précisément, c'est la modélisation d'une réalité qui - souvent - n'est pas de nature physique : il y a un peu de sciences humaines dans les probabilités. En témoigne l'intérêt récurrent des philosophes pour ses fondements mais aussi, dans un autre registre, l'émergence de disciplines comme l'économétrie et, plus récemment encore, l'explosion des mathématiques financières : les probabilités sont un outil privilégié de modélisation des comportement humains.

Il reste que la maturité scientifique des probabilités a été effectivement tardive. Longtemps, le "calcul des probabilités" a été réduit, dans ses fondements, à ses aspects combinatoires. Ainsi, en 1825, Pierre Simon de Laplace (1749-1827)(16), dans son Essai philosophique sur les probabilités définit la probabilité en ces termes "La théorie des hasards consiste à réduire tous les événements du même genre à un certain nombre de cas egalement possibles, c'est-à-dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence, et à déterminer le nombre de cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité. Le rapport de ce nombre à celui de tous les cas possibles est la mesure de cette probabilité, qui n'est ainsi qu'une fraction dont le numérateur est le nombre des cas favorables et le dénominateur est le nombre de cas possibles" alors même que son traité Théorie analytique des probabilités paru en...

----

12 Mathématicien Suisse aux contributions innombrables dans tous les domaines des mathématiques et de la physique.

13 La ville de Koenigsberg, construite sur deux bras de la Prégel formant une île, possédait sept ponts. La question posée était de savoir s'il était possible, vue leur configuration, de traverser chacun des sept ponts une et une seule fois. Euler montra que non (on dirait aujourd'hui que le graphe formé par les 7 ponts n'était pas eulérien !). Les habitants résolurent le problème en construisant un huitième pont dans la ville rebaptisée Kaliningrad.

14 Mathématicien et philosophe allemand. A jeté les bases du calcul différentiel auquel nous faisons référence ici.

15 Mathématicien et physicien anglais. Notamment célèbre pour avoir découvert les lois de la gravita-tion universelle qui le conduisirent à jeter les bases du calcul intégral (fluxions).

16 Mathématicien et astronome français.

1814 ne se réduit clairement pas à du dénombrement! En fait, les probabilités ne trouvaient pas leur assise dans les mathématiques des XVIIIe et XIXe siècles et, dès qu'elles s'éloignaient de leur foyer combinatoire, elles semblaient se disperser en une multitude de micro-théories relatives à des problèmes un peu anecdotiques. Ceci a sans doute à voir avec les noms donnés aux principales lois de probabilités.

La première forme achevée des axiomes unificateurs de la théorie des probabilités est le fruit des travaux d'Andrei Kolmogorov (1903-1987)(17) dans l'article en allemand Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung en 1933. À ce titre , mais aussi pour nombre de théorèmes fondamentaux, Kolmogorov est communément considéré comme le père des probabilités modernes. Mais rien n'aurait été possible si, à l'aube du XXe siècle, Émile Borel (1871-1956)(18) et Henri Lebesgue (1875-1941)(19), n'avaient fait émerger le corpus mathématique aujourd'hui achevé appelé théorie de la mesure et qui constitue véritablement les fondations théoriques des probabilités. Si l'on convient que les axiomes de Kolmogorov sont aux probabilités ce que les axiomes d'Euclide(20) sont à la géométrie, alors la théorie des probabilités est sans conteste une très jeune pensionnaire de la maison mathématique.

Que le lecteur non encore affranchi des mystères du second cycle des études mathématiques se rassure, on peut encore résoudre des problèmes de probabilités sans recourir explicitement à la théorie de la mesure. Après tout, c'est en partie ce que ce livre fait. Mais, même là où elle semble absente, le lecteur averti sentira son influence, un peu dans ce qui est écrit et beaucoup dans ce qui ne l'est pas !

S'il est acquis que le hasard est l'objet même des probabilités, il est intriguant de constater à quel point le probabiliste semble faire peu de cas de son gagne-pain, préférant laisser à d'autres, philosophes, physiciens, économistes, le soin de disserter sur cet objet. Jusqu'aux autres mathématiciens - René Thom(21) pour n'en citer qu'un - qui sont à l'occasion sollicités pour se joindre au débat. Mais de probabilistes, point. L'explication est simple : en se structurant comme discipline mathématique, i.e. en s'axiomatisant, les probabilités ont perdu le goût et le besoin de disserter sur leurs fondements. Comme toute science, elle vit d'une dynamique auto-entretenue de questions "mal

----

17 Mathématicien russe dont les travaux, d'un rayonnement immense, portent essentiellement sur les probabilités et l'analyse.

18 Mathématicien français, célèbre pour ces travaux en théorie de la mesure, en topologie et en probabilités.

19 Mathématicien français, père de la théorie de l'intégration qui porte son nom et qui s'est imposée aujourd'hui (voir, parmi d'autres, [4] pour une initiation éventuelle).

20 i.e. transmis par Euclide à la postérité...

21 Mathématicien français, initiateur de la théorie des catastrophes.

posées" et de réponses "incomplètes" génératrices de nouvelles questions, s'alimentant à l'occasion d'interactions avec d'autres sciences mais aussi, souvent, des applications qu'elle suscite(22).

Si cette démarche semble une caractéristique universelle de l'activité de recherche, elle est parfois difficile à défendre, notamment sur un plan pédagogique. Or il arrive que le chercheur se mue en enseignant. La cause est toujours la même : la modélisation. En effet, comment modéliser quelque chose - le hasard - sans en rien connaître au préalable ? À cet instant, se cacher derrière les axiomes de Kolmogorov et renvoyer aux calendes grecques une éventuelle compréhension du hasard risque de susciter un rejet immédiat et définitif de l'auditoire. Conclusion dommageable pour un premier cours. Et le question est réellement épineuse car, à la différence de l'analyste appliqué qui laisse volontiers aux physiciens et aux mécaniciens le soin de déterminer l'équation aux dérivées partielles qui régit le phénomène étudié, le probabiliste ne peut généralement pas échapper à la modélisation, particulièrement à un niveau élémentaire. Avant de faire des probabilités, il est inévitable de tenter d'apporter quelques éléments de réponse à la question "qu'est-ce que le hasard ?" et à son corollaire inévitable : "le hasard existe-t-il ?" (sous-entendu vraiment).

Tout d'abord, par souci de concision, on reformule la définition originelle : on appelle phénomène aléatoire tout phénomène dans lequel intervient le hasard. Est donc aléatoire, tout phénomène dont on ne peut prévoir l'issue de façon certaine avant qu'il soit survenu (un phénomène dont on peut prévoir l'issue finale avec certitude est appelé déterministe). Ajoutons que l'éventail des issues possibles a priori doit lui être accessible. Si l'on en revient aux dés, par la faute de qui tout est arrivé, il apparaît qu'un lancer de dé est l'exemple typique d'un phénomène aléatoire : on sait qu'il tombera sur l'une de ses six faces et l'on ne peut prévoir sur laquelle exactement. Et ceci est vrai que le dé soit pipé ou non! Si le dé n'est pas pipé, il tombera indifféremment sur chacune des six faces, donc avec une probabilité de 1/6. C'est une situation dite d'équiprobabilité qui est celle de la plupart des jeux de hasard usuels et qui est effectivement à l'origine du calcul des probabilités (cf. Laplace ci-avant). Pour autant, même pipé, le lancer d'un dé reste un phénomène aléatoire, il est simplement plus compliqué. Si l'on procède à plusieurs lancers consécutifs, le probabiliste va ajouter une hypothèse à son modèle en supposant que ces lancers n'ont aucune influence les uns sur les autres : c'est l'hypothèse d'indépendance (des lancers).

Ce point de vue est celui du joueur (et du probabiliste). On peut en adopter un autre : lancer un dé relève des lois de la mécanique rationnelle. Si les conditions initiales (position et vitesse), la forme du dé et celle du tapis de jeu sont parfaitement connues, alors la position finale du dé sur le tapis peut être déterminée

----

22 Ceci n'exclut pas quelques graves crises en forme de remise en question. Ainsi celle qui, à la fin du du XIXe siècle, a ébranlé les fondements des mathématiques et conduit à la théorie axiomatisée des ensembles.

de façon exacte, et partant la face qu'il affichera. À ce détail près qu'il est totalement illusoire d'espérer construire une machine suffisamment précise pour réaliser une telle prouesse. Quant à la main d'un être humain n'en parlons pas. À qui la faute ? L'extrême sensibilité d'un tel système mécanique aux conditions initiales. C'est en quelque sorte une situation de type chaotique (bien que l'expression s'emploie plutôt pour des systèmes dont la durée de vie n'est pas limitée dans le temps...). A-t-on besoin d'évoquer le cas de plusieurs lancers successifs ?... Et face à ce dilemme, qu'a fait le probabiliste ? Tel Alexandre tranchant le noeud gordien, il s'est contenté de fournir un modèle efficace du phénomène, c'est-à-dire permettant d'en tirer toute l'information exploitable.

Finalement, cet exemple du dé, s'il ne répond pas à la première question - la nature du hasard - tendrait à répondre "non" à la seconde - son existence - tout en justifiant l'intervention du probabiliste. Plus généralement, nombre de phénomènes perçus en leur temps comme aléatoires ne le sont plus aujourd'hui. Dans la haute Antiquité (babylonienne notamment), les éclipses et les passages de comète apparaissaient comme des manifestations divines - définition somme toute fort séduisante d'un phénomène aléatoire - et suscitaient de grandes frayeurs voire des paniques dans la population. Les progrès de l'astronomie ont rationalisé ces manifestations et leur ont ôté toute forme d'aléa, comme le notait déjà Laplace dans son Traité analytique des Probabilités. Aujourd'hui, soigneusement minutées par le calendrier des postes ou nos quotidiens préférés, ces manifestations célestes sont devenues un business and entertainment parmi d'autres.

Les auteurs de ce livre ont tous eu l'honneur d'être, à l'heure de leur naissance, des phénomènes aléatoires ayant pour issues possibles "garçon" ou "fille". Leurs enfants, échographie aidant, ont perdu ce privilège. Et l'on pourrait multiplier les exemples : la science fournit une information - ou les moyens d'y accéder (imagerie médicale, ...) - et cette information tue le hasard. Dans ces conditions, une modélisation aléatoire peut être vue comme l'exploitation "optimale" de l'information disponible a priori sur un phénomène à un instant donné. Si toute l'information est ou devient disponible, le modèle aléatoire perd son sens. Le hasard ne serait donc alors qu'une commodité, une boite noire. Ce n'est pas si simple car la science, qui parfois réduit l'aléa à néant, s'en remet aussi à lui dans ses plus ultimes fondements. Ne modélise-t-on pas en mécanique quantique la position d'une particule par une densité de probabilité(23) ? L'expression est piégée puisqu'il s'agit d'une interprétation - dite de Copenhague - due à Niels Bohr (1885-1962)(24) et qui fut combattue par l'un des inventeurs de la

----

23 Les physiciens préfèrent au terme "densité de probabilité" celui d' "amplitude" ou encore de "fonction d'onde". Pour mémoire, signalons que c'est à cette amplitude que l'on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir les inégalités de Heisenberg, couramment et improprement baptisées "principe d'incertitude de Heisenberg".

24 Physicien danois, initiateur de la théorie moderne de l'atome (atome de Bohr), il portera notamment sa réflexion sur le sens et l'interprétation des fondements la mécanique quantique.

mécanique quantique, Louis de Broglie (1892-1987)(25) jusqu'à sa mort. Albert Einstein (1879-1955)(26) manifesta également son opposition virulente à cette interprétation lors d'une célèbre controverse avec Bohr: "Dieu ne joue pas aux dés " (encore les dés !). Un tel modèle probabiliste est-il une vision "commode" de la réalité ou "la" réalité ? Au fil du temps, il semble cependant que l'interprétation probabiliste ait prévalu. En physique, le hasard peut donc être nécessité.

Et si l'on revient à nous, les êtres vivants. Sommes-nous le fruit du hasard ? Du quel ? Comme le dit la chanson(27)

De Ruth ou de Moïshé, lequel a eu l'idée?

Qu'importe j'ai gagné la course, et parmi des milliers

Nous avons tous été vainqueurs, même le dernier des derniers,

Une fois au moins les meilleurs, nous sommes nés.

Mais avons-nous réellement été "les meilleurs" ou ne nous sommes-nous pas plutôt contentés de "passer par hasard" là où il fallait ? Et ce que la chanson ne dit pas tout à fait, c'est que le spermatozoïde vainqueur contenait une moitié aléatoire des chromosomes de l'organisateur de la course qui se sont recombinés avec la moitié des chromosomes de l'organisatrice contenue dans l'ovule de ses pensées(28). En fait de course, la nature a conçu une loterie pour assurer la transmission du patrimoine génétique de l'espèce. Elle a donc fabriqué un hasard nécessaire. Que reste-t-il alors de la controverse sur le lancer de dé déterministe ?

Ainsi, partant à la recherche du hasard, on retombe invariablement sur des fausses querelles ou de vraies batailles de modélisation. Et l'on se prend très vite à regretter notre hasard, le hasard probabiliste. Celui qui, lové dans les axiomes de Kolmogorov, surgit dans la loi des grands nombres, le théorème centrale-limite ou les tests statistiques. D'autant que ce hasard abstrait, guide infatigable des marches aléatoires, du mouvement brownien (voir partie IV ou [12]) et de tant d'autres processus stochastiques n'est pas le moins fascinant...

----

25 Physicien français, fondateur de la mécanique ondulatoire, elle-même à l'origine, avec les travaux de Heisenberg et de Schrödinger, de la mécanique quantique.

26 que l'on ne présente pas.

27 Bonne idée, (J.J. Goldman/J.J. Goldman), En passant, Columbia, 1998.

28 Chaque cellule humaine, sauf précisément les cellules sexuelles, comporte 23 paires de chromosomes, chaque paire étant constituée d'un chromosome d'origine maternelle et d'un chromosome d'origine paternelle. Une cellule sexuelle ne contient, elle, que 23 chromosomes, un de chaque paire; chaque représentant ayant été sélectionné ... au hasard avec une chance sur deux. Chacun d'entre nous peut donc produire potentiellement 223 8 .106 " 23-échantillons" de ses 46 chromosomes. Un couple a donc 246 64.1012 possibilités de combinaisons chromosomiques à partir de ses deux fois 23 XVIII paires de chromosomes.

CHAPITRE 1

Tel est parfois pris...

Niveau 0

Les producteurs du jeu télévisé américain Let's make a deal avaient tout prévu. Mais pas tout compris. Alors ils ont beaucoup perdu. De quoi s'agissait-il ? De faire gagner - ou perdre - une auto à un candidat sorti préalablement vainqueur de joutes qui ne nous intéressent pas ici. Face au candidat trois portes. Derrière l'une, une voiture, derrière chacune des deux autres, une chèvre. On part du principe - certes discutable - que l'objet de toutes les convoitises est la voiture. L'animateur invite donc le candidat à désigner la porte de son choix, le lot qu'elle cèle étant définitivement (et immédiatement) sa propriété.

Évidemment, le candidat hésite dans un concert d'encouragements contradictoires hurlés par une foule de spectateurs en liesse. L'animateur, bateleur infatigable, y va de ses propres conseils. Et le candidat choisit, enfin.

Pub, bandes annonce. Retour dans le studio.

L'animateur s'approche, solennel, de la porte désignée. L'instant est historique, comme tous les soirs à la même heure. Mais, coup de théâtre, voilà qu'il se ravise soudainement et ouvre une autre porte, d'où émerge une chèvre bêlante et apeurée. Le candidat s'interloque quelque peu mais ne se décontenance pas pour autant : on est à la télé, tout de même.

Là, second coup de théâtre quotidien, l'animateur, hilare, s'approche du candidat, le réconforte d'une affectueuse bourrade sur l'épaule : "allez, à vous de jouer" ; puis, désignant les deux dernières portes fermées, il ajoute, Grand Prince : "Tenez, vous m'êtes tellement sympathique que je vous propose d'oublier le passé on oublie tout et ouvrez la porte que vous voulez ! ".

Question (embarrassante): que doit faire le candidat ? Maintenir son choix? En changer ? Tirer à pile ou face ?

La question, d'apparence anodine, a suscité outre-atlantique une controverse aussi dévastatrice qu'inattendue, et pas seulement dans les pages courrier des hebdomadaires TV. D'éminentes personnalités du monde des sciences ont exprimé leur opinion et quelques certitudes généralement contradictoires. On susurre même qu'on en aurait parlé dans des congrès de Mathématiques...

À ce point de l'histoire, l'heure est venue d'une pause provisoire dans l'anecdote pour nous intéresser à notre tour au fond du problème. Les arguments échangés lors de ces polémiques se résument pour l'essentiel a ceci :

LES UNS: La question ne se pose pas: il reste une "bonne" et une "mauvaise" porte, donc le candidat a une chance sur deux de gagner quoi qu'il arrive...

LES AUTRES : S'il joue son choix à pile ou face, certainement. Mais s'il ne fait rien, il n'utilise pas l'information distillée par l'animateur en ouvrant sciemment une porte avec chèvre, il a donc toujours une chance sur trois de gagner...

LES UNS : une chance sur trois alors qu'il ne reste que deux possibilités équiprobable grâce à l'intervention de l'animateur? Absurde.

Etc, etc.

Dans ce dialogue de sourds, personne n'a vraiment raison même si LES UNS ont moins raison que LES AUTRES. En effet, il est clair que si le candidat modifie son choix à pile ou face, sa chance de gagner est 1/2. Comme elle était auparavant de 1/3, il utilise donc efficacement l'information fournie par l'animateur (qui évidemment connaît le dessous des cartes, en l'espèce le derrière des portes). Mais l'utilise-t-il optimalement ?

Supposons en effet que le candidat adopte plutôt la stratégie suivante a priori : Quel que soit mon choix de départ, je le changerai systématiquement après ouverture de la porte par l'animateur. Que va-t-il se passer?

- Si le candidat avait au départ choisi la "bonne" porte, ce qui est le cas avec une probabilité de 1/3, en en changeant il perd immanquablement puisque la porte qu'il choisit est forcément "mauvaise".

- Si le candidat avait au départ choisi une "mauvaise" porte, ce qui est le cas avec une probabilité de 2/3, l'animateur est alors contraint d'ouvrir la seconde "mauvaise" porte. La troisième, objet du choix modifié du candidat, est donc nécessairement la "bonne".

Conclusion : force est de convenir que s'il adopte cette stratégie de changement systématique, le candidat va gagner 2 fois sur 3 et non plus 1 fois sur 2 comme à pile ou face ou 1 fois sur 3 s'il maintient son choix initial !

Il est donc indiscutable au terme de ce petit raisonnement que la stratégie optimale pour le candidat consiste à changer systématiquement de porte lorsque l'animateur lui en laisse le loisir.

Maintenant que les choses sont claires, reprenons le fil médiatique de l'histoire de Let's make a deal. Ce qui surprend le plus, c'est l'ampleur démesurée de la polémique suscitée par cette question en 1991, d'abord aux États-Unis, puis

----

en Allemagne. Si l'on en croit Der Spiegel, tout est parti de la prise de position en faveur du changement de porte d'une certaine Marilyn vos Savant, rédactrice de la rubrique Demande à Marilyn dans le magazine Parade, accessoirement célèbre pour être dotée du plus haut quotient intellectuel jamais mesuré (228). N'étant pas lecteurs de ce magazine, nous ignorons si sa prise de position était argumentée ; dans l'affirmative, on peut penser qu'il s'agissait du raisonnement détaillé ci-avant. Quoi qu'il en soit, tous les lecteurs ne furent pas convaincus. En effet, celle-ci affirme avoir reçu à l'époque plus de 10 000 lettres, exprimant pour la plupart un désaccord radical avec son conseil. Toujours d'après Marilyn vos Savant, les moins virulents n'étaient pas les scientifiques et les mathématiciens. Ces derniers notamment ne trouvaient pas de mots assez durs pour stigmatiser l'ignorance crasse de son "super-cerveau". On la traita de "pauvre idiote", d'être "la vraie chèvre de l'histoire" puis, pour finir, on l'accusa d'avoir, avec ses conseils ineptes, aggravé "la crise que traverse l'enseignement des mathématiques".

Mais le plus bizarre est encore ailleurs. Aucune démonstration ou argument ne parvint à ébranler la conviction d'aucun des camps, ce qui laisse rêveur, tant et si bien que c'est l'animateur de l'émission, 66 ans dont trente passés à animer Let's make a deal, qui finit par se résoudre... à faire une simulation dans sa maison de campagne avec des volontaires neutres. Au terme d'un certain nombre d'essais - on ne sait pas combien -, il en arriva à la conclusion que l'on sait: il vaut toujours mieux changer de porte ! Une application pertinente mais quelque peu inattendue de la loi des grands nombres !

Ce que l'histoire ne dit pas, c'est si les producteurs et les concepteurs du jeu avaient connaissance de cette stratégie optimale en proposant leur projet à la chaîne de télévision. Si ce n'est pas le cas, les simulations de leur animateur fétiche ont dû leur être fatales. Au bout de quelques semaines, il ne leur est resté que leurs yeux pour pleurer et un troupeau de chèvres à élever, à l'abri de leurs créanciers. On peut aussi envisager un autre dénouement, en forme de success story : au parfum depuis le premier jour, ils sont devenus au fil des ans les plus riches concessionnaires automobiles du pays. Et quand le lièvre qui cachait la chèvre fut enfin levé, leur fortune était déjà faite depuis longtemps...